

Лекция 9. Бір айнымалы функциялардың дифференциалдық есептеулері.
Функцияның туындысы.

Айталық, $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде және оның маңайында анықталған болсын.

Анықтама. Аргумент x -тің x_0 нүктесіндегі өсімшесі деп $\Delta x = x - x_0$ айырмасын атайды.

Анықтама. $y = f(x)$ функцияның x_0 нүктесіндегі өсімшесі деп $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ айырмасын айтады.

Анықтама. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің маңайында анықталған және $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ болса, онда ол x_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады. Шындығында да $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы деп

$$y'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ ақырлы шегін айтады.}$$

Бұл туынды мына символдардың бірімен белгіленеді: $y'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $y' \Big|_{x=x_0}$, $\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0}$, $f'(x_0)$.

Егер $y = f(x)$ функциясының (a, b) интервалының әрбір нүктесінде туындысы болса, онда оны осы интервалда дифференциалданады дейді. Туындыны табу амалын дифференциалдау дейді.

Теорема. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын функция болса, онда ол бұл нүктеде үзіліссіз болады.

Ескерту: теорема керісінше дұрыс емес.

Туындының геометриялық мағынасы. Туындының геометриялық мағынасы: $f'(x_0)$ туындысы $y = f(x)$ функциясының графигіне $(x_0, f(x_0))$ нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті болады. Осы жанаманың теңдеуін былай жазады: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Туындының механикалық мағынасы. Егер x — айнымалысын уақыт деп есептеп, $f(x)$ — функциясы дененің жүрген жолын сипаттаса, онда $f'(x)$ дененің x — уақытындағы жылдамдығын білдіреді.

Дифференциалдаудың негізгі ережелері. Туындының анықтамасын пайдаланып, кейбір элементар (қарапайым) функциялардың туындыларын есептейміз.

1. Көрсеткішті функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. $(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$.

Дербес жағдайда $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$.

2. Тригонометриялық функциялар $y = \sin x$, $y = \cos x$.

$$\begin{aligned}
 (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2}}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x. \text{ Дәл осылай } (\cos x)' = -\sin x.
 \end{aligned}$$

3. Дәрежелік функция $y = x^\alpha$. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Дербес жағдайда, $(x^2)' = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -1x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$.

Теорема 1. (қосындыны, көбейтіндіні және қатынасты дифференциалдау ережелері). Егер $y = u(x)$ және $y = v(x)$ дифференциалданатын болса, онда бұл функциялардың қосындысы, көбейтіндісі және қатынасы да (қатынастың бөлімі $v(x) \neq 0$) осы нүктеде дифференциалданады және мына формулалар орынды:

$$1. (u \pm v)' = u' \pm v' \quad 2. (u \cdot v)' = u'v + uv' \quad 3. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Күрделі функцияның туындысы. $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ функциялары үзіліссіз және дифференциалданатын функциялар болсын. Сонда күрделі $y = f(\varphi(x))$ функциясының туындысы:

$$y' = f'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'_u \cdot u'_x. \text{ Сонымен } y' = f'_u \cdot u'_x.$$

1-мысал. $y = (\sin x^2)$ туындысын табу керек. Функцияны былай жазамыз $y = \sin x^2 = \sin u$, мұндағы $u = x^2$. Сондықтан $(\sin x^2)' = (\sin u)' \cdot (u)' = \cos u \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$.

2-мысал. $y = (6x + 7)^4$ туындысын табу керек. $y' = 4(6x + 7)^3 \cdot 6 = 24(6x + 7)^3$.

Кері функцияның туындысы. $y = y(x)$ және оған кері $x = x(y)$ функциялары $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз және дифференциалданатын болсын. Сонда кері функцияның туындысы:

$$x'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}. \text{ Сонымен } x'_y = \frac{1}{y'_x} \text{ болады.}$$

3-мысал. $(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Мұнда $y = \arcsin x$, $x = \sin y$. $y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$.

4-мысал. $(\arctg x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$.

Негізгі элементар функциялар туындыларының кестесі

1. $(c)' = 0.$	10. $(chx)' = shx.$
2. $(x^a)' = ax^{a-1}.$	11. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}.$
3. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x.$	12. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}.$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$	13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
5. $(\sin x)' = \cos x.$	14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
6. $(\cos x)' = -\sin x.$	15. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$
7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$	16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$
8. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$	
9. $(shx)' = chx.$	

Осы кесте мен туындыны есептеу ережелерінің жәрдемімен кез келген функциялардың туындысын табуға болады.

Параметр арқылы берілген функцияның туындысы. $y = f(x)$ функциясын кейде параметрлік түрде жазған ыңғайлы болады

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Онда $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}$. Сонымен параметр арқылы берілген функцияның туындысы:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

5-мысал. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$, y'_x табу керек. Шешімі: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}$

Функцияның дифференциалы. $y = f(x)$ функциясының шектелген туындысы бар болсын, онда:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x), \text{ демек } \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x) \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0 \right), \alpha - \text{шексіз аз шама.}$$

Онда функцияның өсімшесі былай жазылады: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. Осы теңдікте екінші қосылғыш $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, Δx – ке қарағанда жоғарғы ретті шексіз аз шама болғандықтан, бірінші қосылғыш Δy – ке эквивалентті шама болады.

Анықтама. Функцияның туындысының аргументтің өсімшесіне көбейтіндісін дифференциал деп атайды және мына түрде жазады: $dy = f'(x)\Delta x$. Дербес жағдайда, егер $y = x$ болса, онда $dy = (x)' \Delta x = \Delta x$, осыдан $dx = \Delta x$ және осыны пайдаланып дифференциалдың формуласын былай жазуға болады: $dy = f'(x)dx$. Осыдан $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, яғни туынды функцияның дифференциалының аргумент дифференциалына бөлінген мәніне тең.

Дифференциалды есептеу ережесі. Айталық $y = u(x)$ және $y = v(x)$ дифференциалданатын функциялар болсын,

$$1) d(u \pm v) = du \pm dv, d(u + c) = du, \text{ мұндағы } c - \text{сан.}$$

$$2) d(u \cdot v) = vdu + u dv, d(cu) = c \cdot du,$$

$$3) d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}, \text{ егер } v(x) \neq 0.$$

Егер $u = u(x)$ функциясы x нүктесінде дифференциалданатын, ал $y = f(u)$ u нүктесінде дифференциалданатын болса, онда $y = f(u(x))$ күрделі функция үшін, $df(u) = f'(u) \cdot u'(x)dx = f'(u)du$. Бұл ережені **бірінші дифференциал формасының инварианттығы** деп атайды. Дифференциалды жуықтап есептеуге қолдануға болады. Айталық, $y = f(x)$ функциясы дифференциалданатын болсын, онда оның өсімшесі:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x), \text{ осыдан } f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Егер x_0 нүктесінде функцияның мәні берілсе, онда: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

6-мысал. $\sin 46^\circ$ -ты жуықтап есепте. $f(x) = \sin x, f'(x) = (\sin x)' = \cos x, x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$

$$\sin(45^\circ + 1^\circ) \approx \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3,14}{180} \approx 0,7191.$$